

Desigualdades y operaciones aritméticas

Desigualdades y la operación adición

Sumar un número a ambos lados de una desigualdad.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c \in \mathbb{R}, \text{ entonces } a + c < b + c.$$

Ejemplo. Si $a < 3$, entonces $a - 7 < -4$.

Ejemplo. Si $a + 4 > 1$, entonces al sumar -4 a ambos lados obtenemos que $a > -3$.

1. Si $a \geq 5$, entonces $a + 2$

2. Si $a < -3$, entonces $a + 4$

3. Si $a + 7 > 2$, entonces a

Sumar desigualdades.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < d, \text{ entonces } a + c < b + d.$$

Ejemplo. Si $a > 4$ y $b > -3$, entonces $a + b > 1$.

Ejemplo. Si $a \leq 5$ y $b < 2$, entonces $a + b < 7$.

Observación. Sólo se suman las desigualdades que tienen el mismo sentido, es decir $<$ con $<$, $>$ con $>$, también $>$ con \geq , pero no $<$ con \geq .

4. Si $a > 3$ y $b > -2$, entonces $a + b$

5. Si $a \leq 5$ y $b \leq 3$, entonces $a + b$

6. Si $a < 3$ y $1 > b$, entonces $a + b$

Desigualdades y la operación multiplicación

Multiplicar una desigualdad por un número positivo.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > 0, \text{ entonces } ac < bc.$$

Ejemplo. Si $a < 3$, entonces $5a < 15$.

Ejemplo. Si $a \geq -7$, entonces $2a \geq -14$.

Ejemplo. Si $3a \leq 5$, entonces al multiplicar por $\frac{1}{3}$ obtenemos que $a \leq \frac{5}{3}$.

7. Si $a < -2$, entonces $3a$

8. Si $a \geq 4$, entonces $7a$

9. Si $3a < 12$, entonces a

Multiplicar una desigualdad por un número negativo.

Al multiplicar una desigualdad por un número negativo, se cambia el signo:

$$\text{Si } a < b \text{ y } c < 0, \text{ entonces } ac > bc.$$

Ejemplo. Si $a < 3$, entonces $-3a > -9$.

Ejemplo. Si $-2a < -8$, entonces al multiplicar por $-\frac{1}{2}$ obtenemos que $a > 4$.

10. Si $a \geq 5$, entonces $-2a$

11. Si $a < -2$, entonces $-4a$

12. Si $-3a > -12$, entonces a

13. Si $-4a \leq 5$, entonces a

Desigualdades y la operación sustracción

Restar dos desigualdades que tienen signos opuestos.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > d, \text{ entonces } a - c < b - d.$$

Demostración. Primero podemos multiplicar la segunda desigualdad por (-1) , luego sumar el resultado con la primera desigualdad. \square

Ejemplo. Si $a < 3$ y $b > 7$, entonces $-b < -7$ y $a - b < -4$.

Ejemplo. Si $a \geq 5$ y $b \leq -1$, entonces $-b \geq 1$ y $a - b \geq 6$.

14. Si $a < 4$ y $b \geq 3$, entonces $-b$ y $a - b$

15. Si $a \leq 7$ y $b \geq -6$, entonces $-b$ y $a - b$

Desigualdades y la operación inversión

En una desigualdad con números positivos pasar a sus inversos.

$$\text{Si } a > 0, b > 0 \text{ y } a < b, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Demostración. Multiplicar la desigualdad $a < b$ por $\frac{1}{a}$ y por $\frac{1}{b}$. □

Ejemplo. Si $a > 7$, entonces $\frac{1}{a} < \frac{1}{7}$.

Ejemplo. Si $a > 0$ y $a \leq 2$, entonces $\frac{1}{a} \geq \frac{1}{2}$.

16. Si $a > 0$ y $a < 7$, entonces $\frac{1}{a}$

17. Si $a \geq 3$, entonces $\frac{1}{a}$

En una desigualdad con números negativos pasar a sus inversos.

$$\text{Si } a < 0, b < 0 \text{ y } a < b, \text{ entonces } \frac{1}{a} > \frac{1}{b}.$$

Demostración. Multiplicar por -1 , pasar a los inversos y otra vez multiplicar por -1 . □

Ejemplo. Si $a < -3$, entonces $-a > 3$, luego $-\frac{1}{a} < \frac{1}{3}$ y por lo tanto $\frac{1}{a} > -\frac{1}{3}$.

18. Si $a < 0$ y $a > -5$, entonces $-a$, $-\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a}$

19. Si $a \leq -\frac{1}{5}$, entonces $-a$, $-\frac{1}{a}$ y $\frac{1}{a}$

Desigualdades y la operación división

Dividir una desigualdad entre otra con números positivos y signo opuesto.

$$\text{Si } a < b \text{ y } c > d > 0, \text{ entonces } \frac{a}{c} < \frac{b}{d}.$$

Demostración. Pasar a los inversos en la segunda desigualdad: $\frac{1}{c} < \frac{1}{d}$, luego multiplicar por la primera. \square

Ejemplo. Si $a < 3$ y $c > 2$, entonces $\frac{a}{c} < \frac{3}{2}$.

Ejemplo. Si $a > -5$ y $0 < c < 4$, entonces $\frac{a}{c} > -\frac{5}{4}$.

20. Si $a \leq 6$ y $b \geq 3$, entonces $\frac{1}{b}$ y $\frac{a}{b}$

21. Si $a > 7$ y $0 < b < 4$, entonces $\frac{1}{b}$ y $\frac{a}{b}$

22. Si $a < 8$ y $b \geq 5$, entonces $\frac{a}{b}$

23. Si $a \geq -4$ y $0 < b \leq 2$, entonces $\frac{a}{b}$

Sumar desigualdades dobles

Sumar un número a todos lados de una cadena de desigualdades.

$$\text{Si } a < b < c, \text{ entonces } a + d < b + d < c + d.$$

Demostración. Sumar d a ambos lados de la desigualdad $a < b$, luego sumar d a ambos lados de la desigualdad $b < c$, juntar los resultados en una cadena. \square

Ejemplo. Si $-3 < a < 2$, entonces $-2 < a + 1 < 3$.

24. Si $5 \leq a < 7$, entonces $a + 3$

25. Si $-2 \leq a \leq 3$, entonces $a - 4$

Sumar desigualdades dobles.

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < e < f, \text{ entonces } a + d < b + e < c + f.$$

Ejemplo. Si $-2 \leq a \leq 7$ y $3 < b \leq 4$, entonces $1 < a + b \leq 11$.

26. Si $-5 \leq a < 1$ y $-2 \leq b \leq 6$, entonces $a + b$

27. Si $1 \leq a \leq 5$ y $-8 \leq b \leq -7$, entonces $a + b$

Multiplicar desigualdades dobles por un número

Multiplicar una desigualdad doble por un número positivo.

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d > 0, \text{ entonces } ad < bd < cd.$$

Ejemplo. Si $-5 < a \leq 6$, entonces $-10 < 2a \leq 12$.

28. Si $-7 \leq a < -5$, entonces $3a$

29. Si $-2 < 4a < 3$, entonces a

Multiplicar una desigualdad doble por un número negativo
(se intercambian los lados).

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < 0, \text{ entonces } cd < bd < ad.$$

Ejemplo. Si $-2 \leq a < 3$, entonces $-12 < -4a \leq 8$.

30. Si $-7 < a \leq 4$, entonces $-5a$

31. Si $-1 \leq -3a \leq 6$, entonces a

Restar desigualdades dobles

De una desigualdad doble restar otra (se cruzan los lados).

$$\text{Si } a < b < c \text{ y } d < e < f, \text{ entonces } a - f < b - e < c - d.$$

Demostración. Al multiplicar la segunda desigualdad $d < e < f$ por -1 se obtiene que

$$-f < -e < -d.$$

Luego la última desigualdad se suma con $a < b < c$. □

Ejemplo. Si $-2 < a \leq 3$ y $4 \leq b \leq 5$, entonces primero notemos que $-5 \leq -b \leq -4$ y luego concluimos que $-7 < a - b \leq -1$.

32. Si $-1 \leq a < 5$ y $2 < b \leq 6$, entonces $-b$ y $a - b$

33. Si $6 < a < 7$ y $-3 < b \leq 1$, entonces $-b$ y $a - b$