

# 9

# Geometría analítica

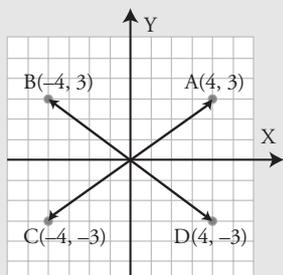


## 1. Vectores

### PIENSA Y CALCULA

Dibuja en unos ejes coordenados los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen sus extremos en los puntos:  $A(4, 3)$ ,  $B(-4, 3)$ ,  $C(-4, -3)$  y  $D(4, -3)$

**Solución:**

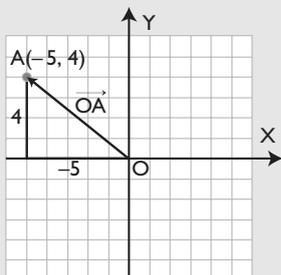


### APLICA LA TEORÍA

**1** Dado el punto  $A(-5, 4)$ , halla el vector  $\vec{OA}$ , represéntalo y halla sus componentes.

**Solución:**

$\vec{OA}(-5, 4)$

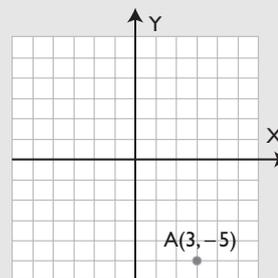


La componente horizontal es  $-5$ , y la vertical,  $4$

**2** Dado el vector  $\vec{v}(3, -5)$ , halla el punto  $A$  tal que el vector  $\vec{OA} = \vec{v}$ , y represéntalo.

**Solución:**

$A(3, -5)$



**3** Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

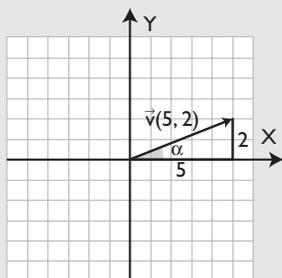
a)  $\vec{v}(5, 2)$

b)  $\vec{v}(-4, 3)$

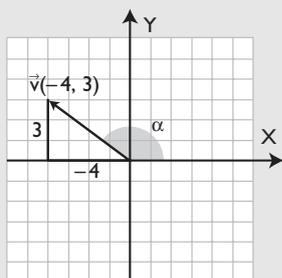
**Solución:**

a)  $|\vec{v}| = \sqrt{5^2 + 2^2} = \sqrt{29} = 5,39$  unidades.

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \alpha = 21^\circ 48' 5''$$



b)  $|\vec{v}| = (-4)^2 + 3^2 = 5$  unidades.

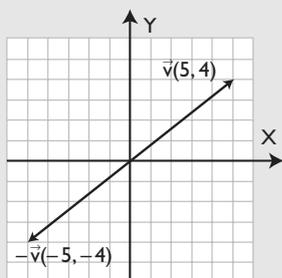


$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{3}{-4} \Rightarrow \alpha = 143^\circ 7' 48''$$

- 4 Halla el vector opuesto del vector  $\vec{v}(5, 4)$  y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

**Solución:**

$$-\vec{v} = (-5, -4)$$



- 5 Dados los siguientes vectores:

$$\vec{u}(-3, 2) \text{ y } \vec{v}(4, 3)$$

calcula analítica y geoméricamente:

a)  $\vec{u} + \vec{v}$

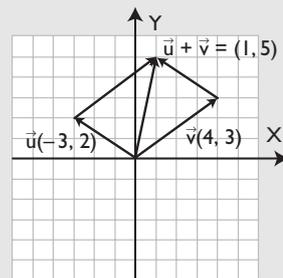
b)  $\vec{u} - \vec{v}$

**Solución:**

a) Analíticamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (-3, 2) + (4, 3) = (1, 5)$$

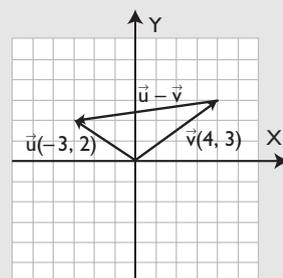
Geoméricamente:



b) Analíticamente:

$$\vec{u} - \vec{v} = (-3, 2) - (4, 3) = (-7, -1)$$

Geoméricamente:



- 6 Dado el vector  $\vec{v}(3, 1)$ , calcula analítica y geoméricamente:

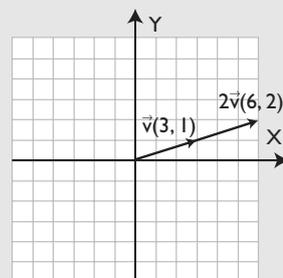
a)  $2\vec{v}$

b)  $-2\vec{v}$

**Solución:**

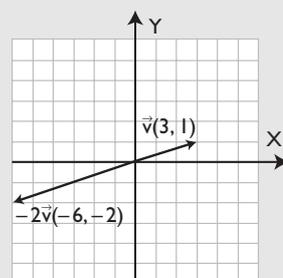
a) Analíticamente:  $2\vec{v} = 2(3, 1) = (6, 2)$

Geoméricamente:



b) Analíticamente:  $-2\vec{v} = -2(3, 1) = (-6, -2)$

Geoméricamente:



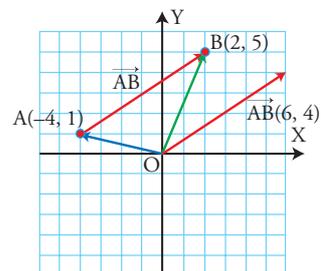
## 2. Ecuaciones de la recta

### PIENSA Y CALCULA

Halla la pendiente del vector  $\overrightarrow{AB}$  del primer dibujo del margen y simplifica el resultado.

**Solución:**

$$\overrightarrow{AB} (6, 4) \Rightarrow m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

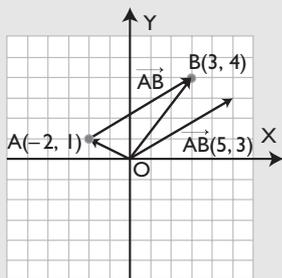


### APLICA LA TEORÍA

- 7** Dados los puntos  $A(-2, 1)$  y  $B(3, 4)$ , calcula el vector  $\overrightarrow{AB}$ . Haz la representación gráfica.

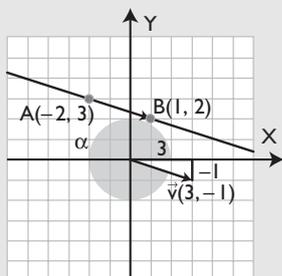
**Solución:**

$$\overrightarrow{AB} (3 + 2, 4 - 1) = (5, 3)$$



- 8** Representa la recta que pasa por los puntos  $A(-2, 3)$  y  $B(1, 2)$ . Halla un vector director y la pendiente de dicha recta.

**Solución:**

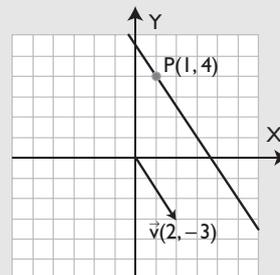


$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} (1 + 2, 2 - 3) = (3, -1)$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{1}{3}$$

- 9** Representa la recta que pasa por el punto  $P(1, 4)$  y tiene como vector director  $\vec{v}(2, -3)$ . Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

**Solución:**



Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (1, 4) + t(2, -3); t \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= 1 + 2t \\ y &= 4 - 3t \end{aligned} \right\}; t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x - 1}{2} = \frac{y - 4}{-3}$$

Ecuación general:

$$\begin{aligned} -3x + 3 &= 2y - 8 \\ 3x + 2y - 11 &= 0 \end{aligned}$$

Ecuación explícita:

$$\begin{aligned} 2y &= -3x + 11 \\ y &= -\frac{3x}{2} + \frac{11}{2} \end{aligned}$$

- 10** Dada la recta  $2x + 3y = 6$ , ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

**Solución:**

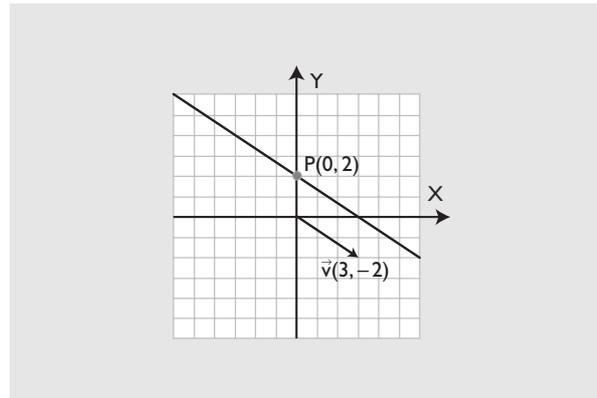
Es la ecuación general.

Para  $x = 0 \Rightarrow 3y = 6 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow P(0, 2)$

$\vec{n}(A, B) \Rightarrow \vec{n}(2, 3)$

$\vec{v}(B, -A) \Rightarrow \vec{v}(3, -2)$

$m = \operatorname{tg} \alpha = -\frac{2}{3}$

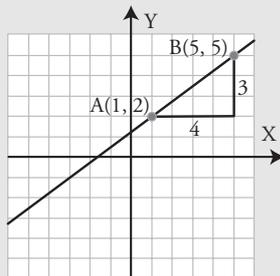


### 3. Otras ecuaciones de la recta

#### PIENSA Y CALCULA

Dibuja la recta que pasa por los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(5, 5)$  y halla su pendiente.

**Solución:**

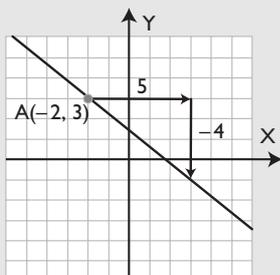


$m = \frac{3}{4}$

#### APLICA LA TEORÍA

- 11** Dibuja la recta que pasa por el punto  $A(-2, 3)$  y que tiene de pendiente  $-4/5$ . Halla la ecuación de dicha recta.

**Solución:**

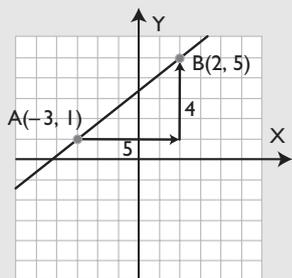


$y - 3 = -\frac{4}{5}(x + 2)$

$y = -\frac{4}{5}x + \frac{7}{5}$

- 12** Dibuja la recta que pasa por los puntos  $A(-3, 1)$  y  $B(2, 5)$ . Halla la ecuación de dicha recta.

**Solución:**



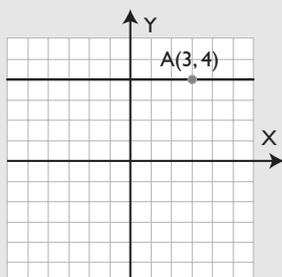
$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} (5, 4) \Rightarrow m = \frac{4}{5}$$

$$y - 1 = \frac{4}{5}(x + 3)$$

$$y = \frac{4}{5}x + \frac{17}{5}$$

- 13** Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto A(3, 4). Escribe su ecuación vectorial.

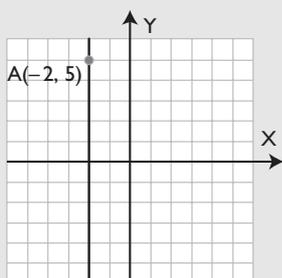
**Solución:**



$$(x, y) = (3, 4) + t(1, 0); t \in \mathbb{R}$$

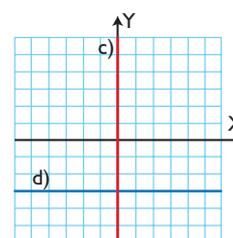
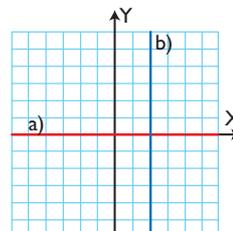
- 14** Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto A(-2, 5). Escribe su ecuación paramétrica.

**Solución:**



$$\left. \begin{array}{l} x = -2 \\ y = 5 + t \end{array} \right\} t \in \mathbb{R}$$

- 15** Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



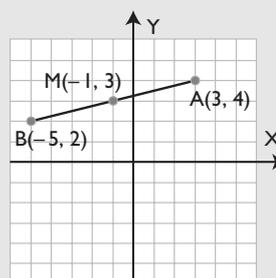
**Solución:**

- a)  $y = 0$
- b)  $x = 2$
- c)  $x = 0$
- d)  $y = -3$

- 16** Halla el punto medio del segmento de extremos A(3, 4) y B(-5, 2). Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$$M(-1, 3)$$



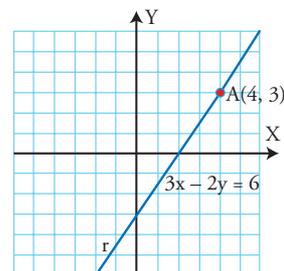
## 4. Posiciones, distancia y circunferencia

### PIENSA Y CALCULA

Halla todos los puntos de coordenadas enteras en la recta del 1<sup>er</sup> dibujo del margen.

**Solución:**

A(4, 3); B(6, 6); C(2, 0); D(0, -3); E(-2, -6)



### APLICA LA TEORÍA

- 17** Estudia analítica y gráficamente la posición relativa de los puntos A(1, 2) y B(-3, 4) respecto de la siguiente recta:

$$r \equiv 2x + 3y = 6$$

**Solución:**

$$A(1, 2) \Rightarrow 2 \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 2 + 6 = 8 \neq 6 \Rightarrow$$

$$A(1, 2) \notin r$$

$$B(-3, 4) \Rightarrow 2 \cdot (-3) + 3 \cdot 4 = -6 + 12 = 6 \Rightarrow$$

$$B(-3, 4) \in r$$

- 18** Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

$$\left. \begin{array}{l} \text{a) } 2x + 3y = 5 \\ \quad 2x - 3y = 11 \end{array} \right\} \quad \left. \begin{array}{l} \text{b) } 2x - y = 3 \\ \quad -2x + y = 1 \end{array} \right\}$$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

**Solución:**

a) Analíticamente:

$$\frac{2}{2} \neq \frac{3}{-3} \Rightarrow \text{rectas secantes.}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

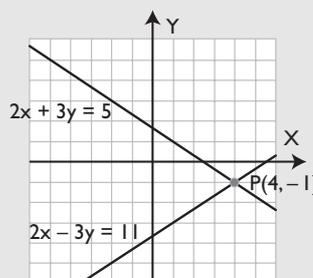
Sumando se obtiene:

$$4x = 16 \Rightarrow x = 4$$

$$x = 4 \Rightarrow y = -1$$

Se cortan en el punto A(4, -1)

Representación:

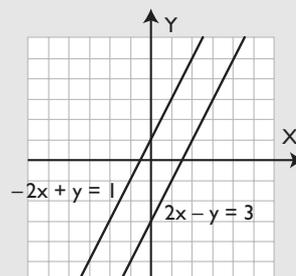


b) Analíticamente:

$$\frac{2}{-2} = \frac{-1}{1} \neq \frac{3}{1} \Rightarrow \text{rectas paralelas.}$$

No se cortan.

Representación:



- 19** Dada la recta  $r \equiv 3x + y = 2$ , halla una recta  $s$ , paralela a  $r$ , y otra perpendicular  $t$  que pasen por el punto P(2, -1). Haz la representación gráfica.

**Solución:**

La recta  $s$  tendrá la misma pendiente que la recta  $r$ , que es:  $m = -A/B = -3$

Su ecuación será:

$$y + 1 = -3(x - 2)$$

$$3x + y = 5$$

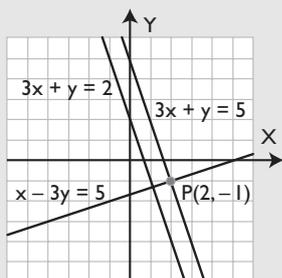
La recta  $t$  tendrá la pendiente inversa y opuesta a la de la recta  $r$ :

Si la pendiente de  $r$  es:  $m_r = -3$ ,

la pendiente de  $t$  será:  $m_t = \frac{1}{3}$

$$y + 1 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$x - 3y = 5$$

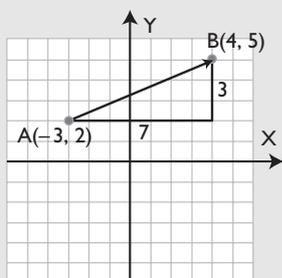


- 20** Halla la distancia que hay entre los puntos  $A(-3, 2)$  y  $B(4, 5)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$$\overline{AB} (7, 3)$$

$$d(A, B) = \sqrt{7^2 + 3^2} = \sqrt{58} = 7,62 \text{ unidades.}$$



- 21** Halla el coeficiente  $a$  para que la recta  $ax + 4y = 11$  pase por el punto  $P(1, 2)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

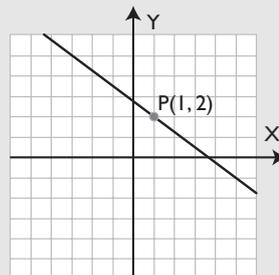
$$a \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 11$$

$$a + 8 = 11$$

$$a = 3$$

La ecuación de la recta será:

$$3x + 4y = 11$$

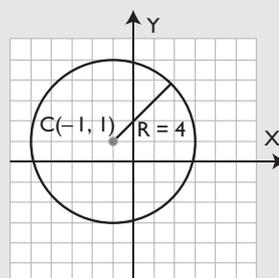


- 22** Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(-1, 1)$ , y de radio, 4. Haz el dibujo.

**Solución:**

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 + 2x - 2y = 14$$



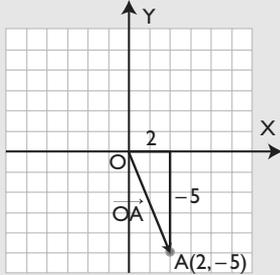
# Ejercicios y problemas

## 1. Vectores

**23** Dado el punto  $A(2, -5)$ , halla el vector  $\overrightarrow{OA}$ , represéntalo y halla sus componentes.

**Solución:**

$$\overrightarrow{OA}(2, -5)$$

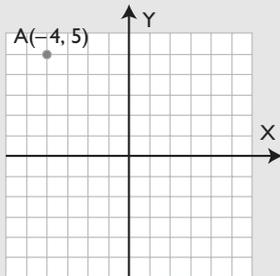


La componente horizontal es 2, y la vertical, -5

**24** Dado el vector  $\vec{v}(-4, 5)$ , halla el punto A, tal que el vector  $\overrightarrow{OA} = \vec{v}$ , y represéntalo.

**Solución:**

$$A(-4, 5)$$

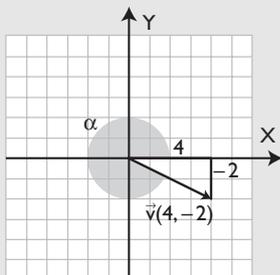


**25** Calcula el módulo y el argumento de los siguientes vectores:

a)  $\vec{v}(4, -2)$

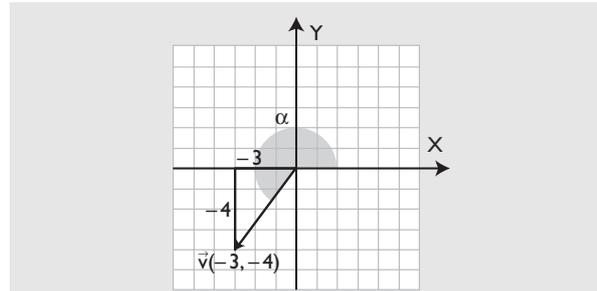
b)  $\vec{v}(-3, -4)$

**Solución:**



a)  $|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + (-2)^2} = \sqrt{16 + 4} = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$

$\text{tg } \alpha = \frac{-2}{4} \Rightarrow \alpha = 333^\circ 26' 6''$



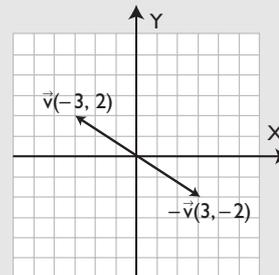
b)  $|\vec{v}| = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{9 + 16} = \sqrt{25} = 5$

$\text{tg } \alpha = \frac{-4}{-3} \Rightarrow \alpha = 233^\circ 7' 48''$

**26** Halla el vector opuesto del vector  $\vec{v}(-3, 2)$  y represéntalos en unos mismos ejes coordenados.

**Solución:**

$$-\vec{v} = (3, -2)$$



**27** Dados los siguientes vectores:

$\vec{u}(3, 2)$  y  $\vec{v}(1, 4)$

calcula analítica y geoméricamente:

a)  $\vec{v} + \vec{v}$

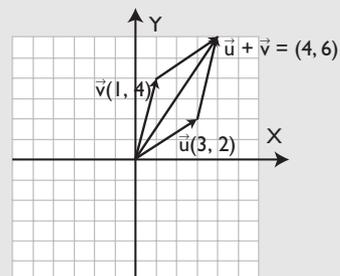
b)  $\vec{u} - \vec{v}$

**Solución:**

a) Analíticamente:

$$\vec{u} + \vec{v} = (3, 2) + (1, 4) = (4, 6)$$

Geoméricamente:

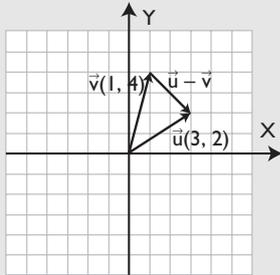


# Ejercicios y problemas

b) Analíticamente:

$$\vec{u} - \vec{v} = (3, 2) - (1, 4) = (2, -2)$$

Geoméricamente:



**28** Dado el vector  $\vec{v}(1, -2)$ , calcula analítica y geoméricamente:

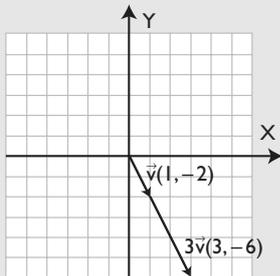
- a)  $3\vec{v}$
- b)  $-3\vec{v}$

**Solución:**

a) Analíticamente:

$$3\vec{v} = 3(1, -2) = (3, -6)$$

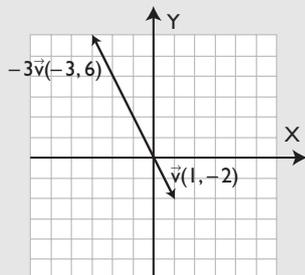
Geoméricamente:



b) Analíticamente:

$$-3\vec{v} = -3(1, -2) = (-3, 6)$$

Geoméricamente:

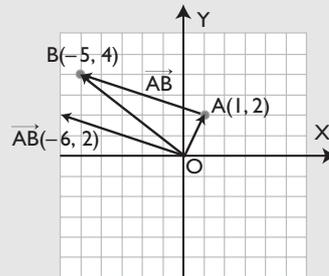


## 2. Ecuaciones de la recta

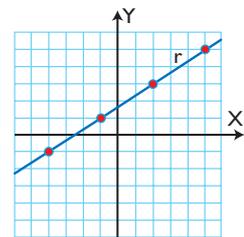
**29** Dados los puntos  $A(1, 2)$  y  $B(-5, 4)$ , calcula el vector  $\vec{AB}$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$$\vec{AB} = (-5 - 1, 4 - 2) = (-6, 2)$$

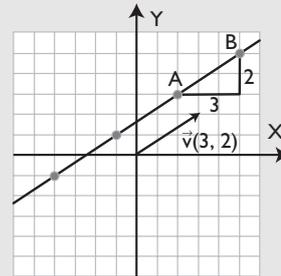


**30** Halla un vector director y la pendiente de la siguiente recta:



**Solución:**

Se dibuja un vector de la recta y se hallan sus componentes.

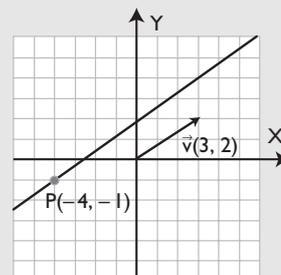


$$\vec{v} = \vec{AB}(3, 2)$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{3}$$

**31** Representa la recta que pasa por el punto  $P(-4, -1)$  y tiene como vector director  $\vec{v}(3, 2)$ . Halla las distintas ecuaciones de dicha recta.

**Solución:**



Ecuación vectorial:

$$(x, y) = (-4, -1) + t(3, 2); t \in \mathbb{R}$$

Ecuaciones paramétricas:

$$\left. \begin{aligned} x &= -4 + 3t \\ y &= -1 + 2t \end{aligned} \right\}; t \in \mathbb{R}$$

Ecuación continua:

$$\frac{x + 4}{3} = \frac{y + 1}{2}$$

Ecuación general:

$$2x + 8 = 3y + 3$$

$$2x - 3y + 5 = 0$$

Ecuación explícita:

$$-3y = -2x - 5$$

$$3y = 2x + 5$$

$$y = \frac{2x}{3} + \frac{5}{3}$$

- 32** Dada la recta  $y = 2x + 5$ , ¿qué tipo de ecuación es? Halla un punto, la pendiente, un vector director y un vector normal. Haz la representación gráfica.

**Solución:**

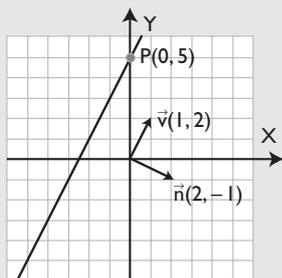
Es la ecuación explícita.

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow y = 5 \Rightarrow P(0, 5)$$

$$m = \operatorname{tg} \alpha = 2$$

$$\vec{v}(1, 2)$$

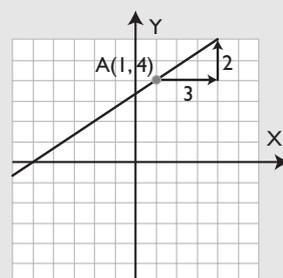
$$\vec{n}(2, -1)$$



### 3. Otras ecuaciones de la recta

- 33** Dibuja la recta que pasa por el punto  $A(1, 4)$  y tiene de pendiente  $2/3$ . Halla la ecuación de dicha recta.

**Solución:**

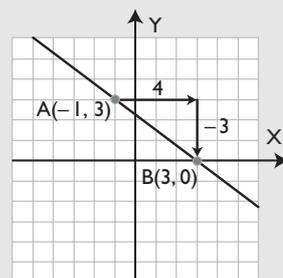


$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 1)$$

$$y = \frac{2}{3}x + \frac{10}{3}$$

- 34** Dibuja la recta que pasa por los puntos  $A(-1, 3)$  y  $B(3, 0)$ . Halla la ecuación de dicha recta.

**Solución:**

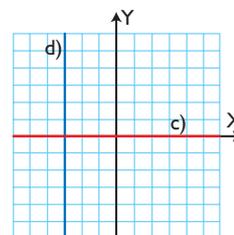
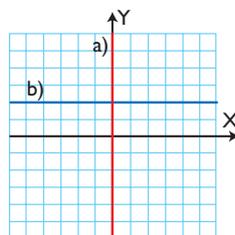


$$\vec{v} = \overrightarrow{AB} (4, -3) \Rightarrow m = -\frac{3}{4}$$

$$y - 3 = -\frac{3}{4}(x + 1)$$

$$y = -\frac{3}{4}x + \frac{9}{4}$$

- 35** Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



**Solución:**

a)  $x = 0$

b)  $y = 2$

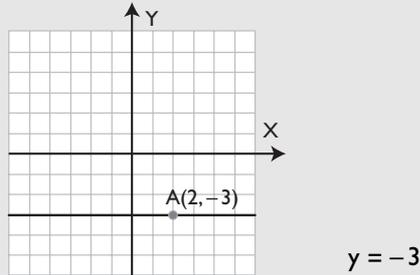
c)  $y = 0$

d)  $x = -3$

# Ejercicios y problemas

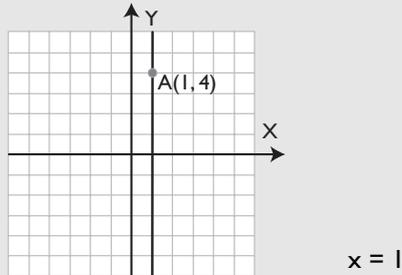
- 36** Dibuja la recta que es paralela al eje X y que pasa por el punto  $A(2, -3)$ . Escribe su ecuación general.

**Solución:**

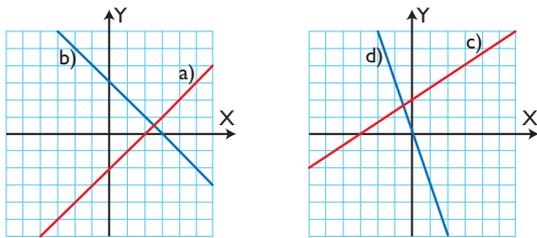


- 37** Dibuja la recta que es paralela al eje Y y que pasa por el punto  $A(1, 4)$ . Escribe su ecuación general.

**Solución:**



- 38** Halla la ecuación explícita de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:



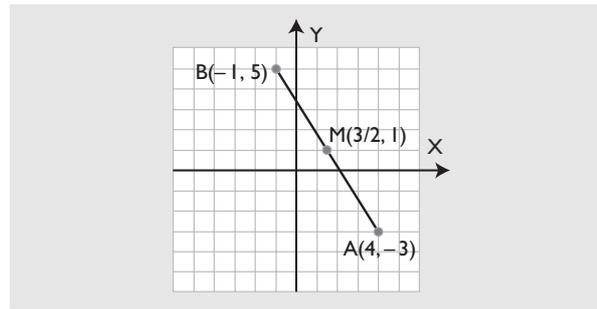
**Solución:**

- a)  $y = x - 2$                       b)  $y = -x + 3$   
 c)  $y = \frac{2}{3}x + 2$                     d)  $y = -3x$

- 39** Halla mentalmente el punto medio del segmento de extremos  $A(4, -3)$  y  $B(-1, 5)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$M(3/2, 1)$



## 4. Posiciones, distancia y circunferencia

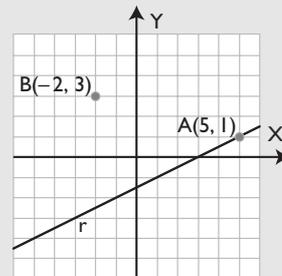
- 40** Estudia analíticamente y gráficamente la posición relativa de los puntos  $A(5, 1)$  y  $B(-2, 3)$  respecto de la siguiente recta:  $r \equiv x - 2y = 3$

**Solución:**

$$A(5, 1) \Rightarrow 5 - 2 \cdot 1 = 5 - 2 = 3 \Rightarrow A(5, 1) \in r$$

$$B(-2, 3) \Rightarrow -2 - 2 \cdot 3 = -2 - 6 = -8 \neq 3 \Rightarrow$$

$$B(-2, 3) \notin r$$



- 41** Estudia analíticamente la posición relativa de los siguientes pares de rectas. Si se cortan, halla el punto de corte:

$$\begin{array}{l} \text{a) } \left. \begin{array}{l} x - 2y = 3 \\ -x + 2y = -3 \end{array} \right\} \\ \text{b) } \left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 5 \\ 2x - y = -4 \end{array} \right\} \end{array}$$

Representa ambas rectas para comprobarlo.

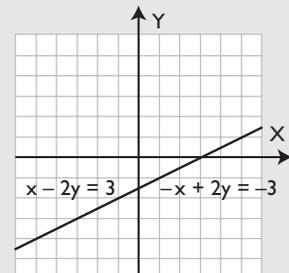
**Solución:**

a) Analíticamente:

$$\frac{1}{-1} = \frac{-2}{2} = \frac{3}{-3} \Rightarrow \text{rectas coincidentes.}$$

Todos los puntos son comunes.

Representación:



b) Analíticamente:

$$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{-1} \Rightarrow \text{rectas secantes.}$$

Para hallar el punto de corte hay que resolver el sistema.

Se resuelve por reducción.

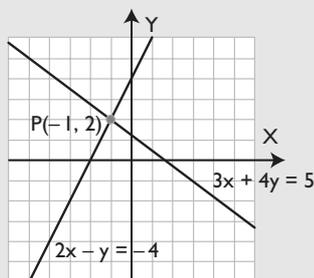
Se multiplica la 2ª ecuación por 4 y sumando se obtiene:

$$11x = -11 \Rightarrow x = -1$$

$$x = -1 \Rightarrow y = 2$$

Se cortan en el punto  $A(-1, 2)$

Representación:



- 42** Dada la recta  $r \equiv x - 3y = 1$ , halla una recta  $s$ , paralela a  $r$ , que pase por el punto  $P(2, 5)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

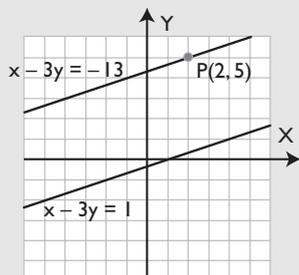
La recta  $s$  tendrá la misma pendiente que la recta  $r$ , que es:

$$m = -A/B = 1/3$$

Su ecuación será:

$$y - 5 = \frac{1}{3}(x - 2)$$

$$x - 3y = -13$$



- 43** Dada la recta  $r \equiv 2x + y = 1$ , halla una recta  $t$ , perpendicular a  $r$ , que pase por el punto  $P(3, 2)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

La recta  $t$  tendrá de vector director:

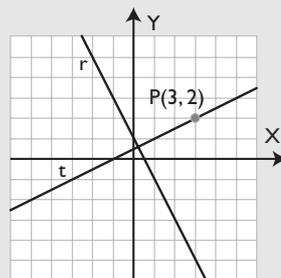
$$\vec{n}(2, 1)$$

$$m = 1/2$$

Su ecuación será:

$$y - 2 = \frac{1}{2}(x - 3)$$

$$x - 2y = -1$$



- 44** Halla la distancia que hay entre los siguientes puntos:

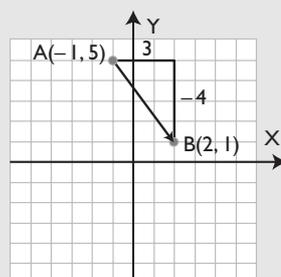
$$A(-1, 5) \text{ y } B(2, 1)$$

Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$$\vec{AB}(3, -4)$$

$$d(A, B) = \sqrt{3^2 + (-4)^2} = 5 \text{ unidades.}$$



- 45** Halla el coeficiente  $a$  para que la recta:

$$4x + ay = 7$$

pase por el punto  $P(-2, 3)$ . Haz la representación gráfica.

**Solución:**

$$4 \cdot (-2) + a \cdot 3 = 7$$

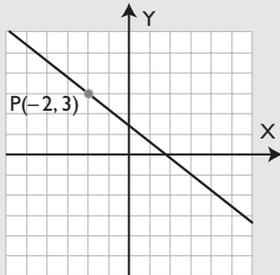
$$-8 + 3a = 7$$

$$a = 5$$

# Ejercicios y problemas

La ecuación de la recta será:

$$4x + 5y = 7$$

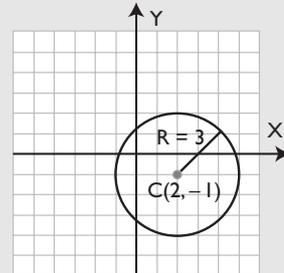


- 46** Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto  $C(2, -1)$ , y de radio, 3. Haz el dibujo.

**Solución:**

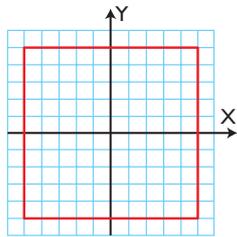
$$(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 - 4x + 2y = 4$$



## Para ampliar

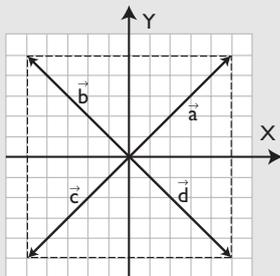
- 47** Dado el siguiente cuadrado de centro el origen de coordenadas y lado de longitud 10:



- a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del cuadrado.  
b) escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

**Solución:**

a) Vectores:



- b)  $\vec{a}(5, 5)$ ,  $\vec{b}(-5, 5)$ ,  $\vec{c}(-5, -5)$ ,  $\vec{d}(5, -5)$

- 48** Calcula mentalmente las componentes de los vectores  $\overrightarrow{AB}$  en los siguientes casos:

- a)  $A(3, 4)$ ,  $B(5, 7)$   
b)  $A(-4, 1)$ ,  $B(2, -5)$   
c)  $A(0, 5)$ ,  $B(-7, 2)$   
d)  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 5)$

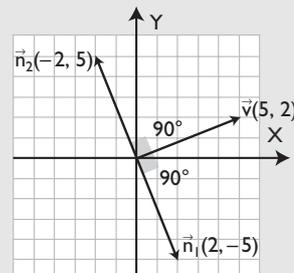
**Solución:**

- a)  $\overrightarrow{AB}(2, 3)$                       b)  $\overrightarrow{AB}(6, -6)$   
c)  $\overrightarrow{AB}(-7, -3)$                 c)  $\overrightarrow{AB}(3, 5)$

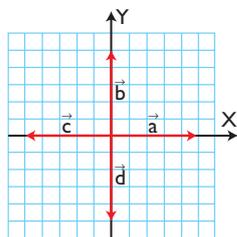
- 49** Halla mentalmente dos vectores perpendiculares al vector  $\vec{v}(5, 2)$  y represéntalos gráficamente.

**Solución:**

$$\vec{n}_1(2, -5), \vec{n}_2(-2, 5)$$



- 50** Calcula mentalmente el módulo y el argumento de los siguientes vectores:



**Solución:**

- $\vec{a}$ : módulo = 5, argumento =  $0^\circ$
- $\vec{b}$ : módulo = 5, argumento =  $90^\circ$
- $\vec{c}$ : módulo = 5, argumento =  $180^\circ$
- $\vec{d}$ : módulo = 5, argumento =  $270^\circ$

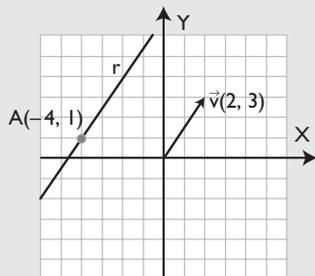
- 51** Dada la siguiente recta:  
 $(x, y) = (-4, 1) + t(2, 3); t \in \mathbb{R}$

halla:

- a) el tipo de ecuación.
- b) un punto.
- c) el vector director.
- d) un vector normal.
- e) la pendiente.
- f) Representála.

**Solución:**

- a) Vectorial.
- b)  $P(-4, 1)$
- c)  $\vec{v}(2, 3)$
- d)  $\vec{n}(3, -2)$
- e)  $m = 3/2$
- f) Representación:



- 52** Halla mentalmente un vector normal y un vector director de cada una de las siguientes rectas:

- a)  $2x + 3y = 5$
- b)  $-x - 2y = 4$
- c)  $-3x + y = 1$
- d)  $5x - 4y = 2$

**Solución:**

- a)  $\vec{n}(2, 3), \vec{v}(3, -2)$
- b)  $\vec{n}(-1, -2) \parallel (1, 2), \vec{v}(2, -1)$
- c)  $\vec{n}(-3, 1), \vec{v}(1, 3)$
- d)  $\vec{n}(5, -4), \vec{v}(4, 5)$

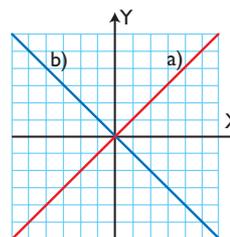
- 53** Halla mentalmente las ecuaciones generales de las siguientes rectas:

- a) Eje X
- b) Eje Y

**Solución:**

- a)  $y = 0$
- b)  $x = 0$

- 54** Halla la ecuación explícita de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas.

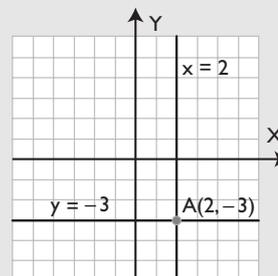


**Solución:**

- a)  $y = x$
- b)  $y = -x$

- 55** Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto  $A(2, -3)$

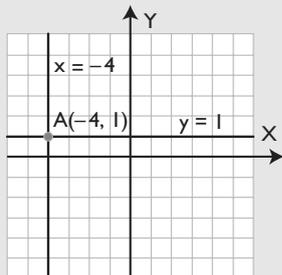
**Solución:**



- 56** Representa y halla mentalmente las ecuaciones generales de las rectas paralelas a los ejes coordenados, que pasan por el punto  $A(-4, 1)$

# Ejercicios y problemas

**Solución:**



**57** Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = 2 \\ -4x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

Son paralelas porque los coeficientes de las variables son proporcionales, y no lo son con los términos independientes.

$$\frac{2}{-4} = \frac{-1}{2} \neq \frac{2}{-1}$$

**58** Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x - 6y = 3 \\ -x + 2y = -1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

Son coincidentes porque todos los coeficientes son proporcionales:

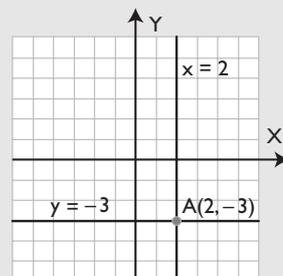
$$\frac{3}{-1} = \frac{-6}{2} = \frac{3}{-1}$$

**59** Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left. \begin{array}{l} x = 2 \\ y = -3 \end{array} \right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

**Solución:**

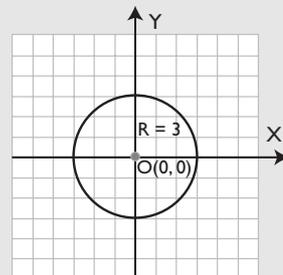


Se cortan, porque la primera es vertical y la segunda es horizontal.

**60** Halla mentalmente la ecuación de la circunferencia de centro el origen de coordenadas y de radio  $R = 3$  unidades. Represéntala.

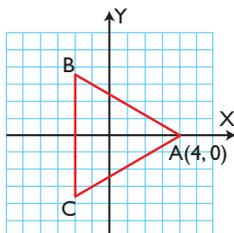
**Solución:**

$$x^2 + y^2 = 9$$



## Problemas

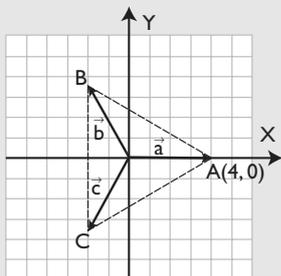
**61** Dado el triángulo equilátero siguiente, de centro el origen de coordenadas y vértice  $A(4, 0)$ :



- representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo uno de los vértices del triángulo equilátero.
- Aplicando las razones trigonométricas, halla la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

**Solución:**

a) Vectores:



b)  $\vec{a}(4, 0)$

$$\vec{b}(4 \cos 120^\circ, 4 \sin 120^\circ) =$$

$$[4 \cdot (-1/2), 4\sqrt{3}/2] = (-2, 2\sqrt{3})$$

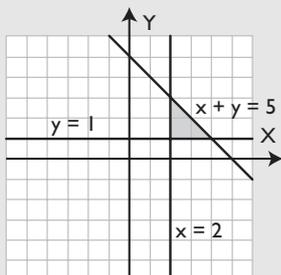
$$\vec{c}(4 \cos 240^\circ, 4 \sin 240^\circ) =$$

$$[4 \cdot (-1/2), 4(-\sqrt{3}/2)] = (-2, -2\sqrt{3})$$

**62** Dibuja y calcula el área del triángulo comprendido entre las rectas siguientes:

$$x = 2, y = 1, x + y = 5$$

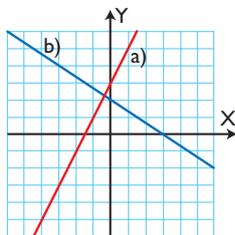
**Solución:**



Es un triángulo rectángulo, la base mide 2 unidades y la altura también mide 2 unidades.

$$\text{Área} = 2 \cdot 2 / 2 = 2 \text{ unidades cuadradas.}$$

**63** Halla la ecuación general de las siguientes rectas representadas en los ejes de coordenadas:

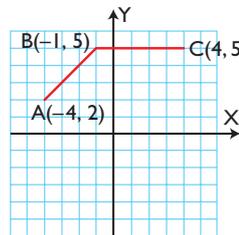


**Solución:**

a)  $y = 2x + 3$

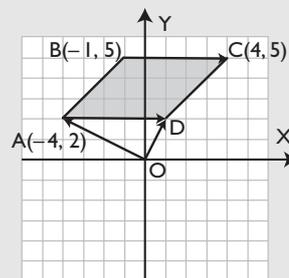
b)  $y = -\frac{2}{3}x + 2$

**64** De un paralelogramo se conocen tres vértices consecutivos:  $A(-4, 2)$ ,  $B(-1, 5)$  y  $C(4, 5)$



Halla las coordenadas del cuarto vértice D utilizando la suma de vectores.

**Solución:**



$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{OA}(-4, 2)$$

$$\vec{BC}(5, 0)$$

$$\vec{OD} = (-4, 2) + (5, 0) = (1, 2)$$

**65** Halla analíticamente un vector director y la pendiente de las rectas que están definidas por los dos puntos siguientes:

a)  $A(0, 0)$ ,  $B(3, 4)$

b)  $A(2, -1)$ ,  $B(4, 6)$

c)  $A(-2, 5)$ ,  $B(3, -4)$

d)  $A(3, -2)$ ,  $B(4, -1)$

**Solución:**

a)  $\vec{v} = \vec{AB}(3, 4)$ ,  $m = 4/3$

b)  $\vec{v} = \vec{AB}(2, 7)$ ,  $m = 7/2$

c)  $\vec{v} = \vec{AB}(5, -9)$ ,  $m = -9/5$

d)  $\vec{v} = \vec{AB}(1, 1)$ ,  $m = 1$

**66** Dada la siguiente recta:

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{4}$$

halla:

a) el tipo de ecuación.

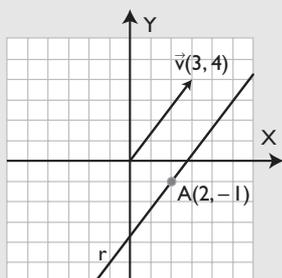
b) un punto.

# Ejercicios y problemas

- c) el vector director.
- d) un vector normal.
- e) la pendiente.
- f) Representála.

## Solución:

- a) Continua.
- b)  $P(2, -1)$
- c)  $\vec{v}(3, 4)$
- d)  $\vec{n}(4, -3)$
- e)  $m = 4/3$
- f) Representación:



- 67** Dada la siguiente recta:

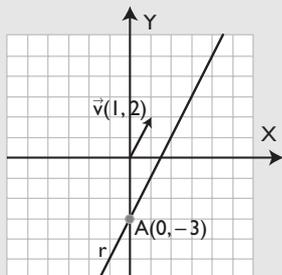
$$y = 2x - 3$$

halla:

- a) el tipo de ecuación.
- b) un punto.
- c) la pendiente.
- d) un vector director.
- e) un vector normal.
- f) Representála.

## Solución:

- a) Explícita.
- b)  $P(0, -3)$
- c)  $m = 2$
- d)  $\vec{v}(1, 2)$
- e)  $\vec{n}(2, -1)$
- f) Representación:

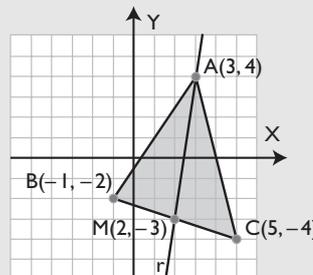


- 68** Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos  $A(3, 4)$ ,  $B(-1, -2)$  y  $C(5, -4)$ :

- a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene la mediana definida por el vértice A
- b) Halla la ecuación de dicha recta.

## Solución:

- a) Dibujo:



- b) La recta  $r$  pasa por los puntos  $M(2, -3)$  y  $A(3, 4)$

$$\vec{v} = \vec{MA}(1, 7)$$

$$m = 7$$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$$y + 3 = 7(x - 2)$$

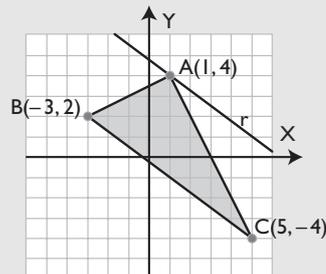
$$y = 7x - 17$$

- 69** Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos  $A(1, 4)$ ,  $B(-3, 2)$  y  $C(5, -4)$ :

- a) representa dicho triángulo y dibuja la recta paralela al lado BC, que pasa por el vértice A
- b) halla la ecuación de dicha recta.

## Solución:

- a) Dibujo:



- b) La recta  $r$  pasa por el punto  $A(1, 4)$  y tiene la misma pendiente que el lado BC

$$\vec{v} = \vec{BC}(8, -6) \parallel (4, -3)$$

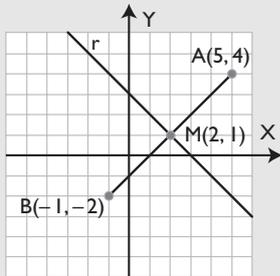
$$m = -3/4$$

$$y - 4 = -\frac{3}{4}(x - 1)$$

$$3x + 4y = 19$$

- 70** Dibuja el segmento de extremos los puntos  $A(5, 4)$  y  $B(-1, -2)$  y su mediatriz. Halla la ecuación de la mediatriz.

**Solución:**



La recta  $r$  pasa por el punto medio del segmento  $\overline{AB}$   $M(2, 1)$

$$\vec{v} = \overline{AB}(-6, -6) \parallel (1, 1)$$

$$m = 1$$

Como la recta  $r$  es perpendicular, su pendiente será inversa y opuesta:

$$m_r = -1$$

Se aplica la recta en la forma punto-pendiente:

$$y - 1 = -(x - 2)$$

$$y = -x + 3$$

- 71** Halla el coeficiente  $k$  para que la recta:

$$kx + 3y = 8$$

pase por el punto  $A(1, 2)$

**Solución:**

$$k \cdot 1 + 3 \cdot 2 = 8$$

$$k = 2$$

- 72** Halla mentalmente la posición relativa de los siguientes pares de rectas:

$$\left. \begin{array}{l} 3x + 4y = 12 \\ 2x + y = 3 \end{array} \right\}$$

Represéntalas y halla el punto de corte.

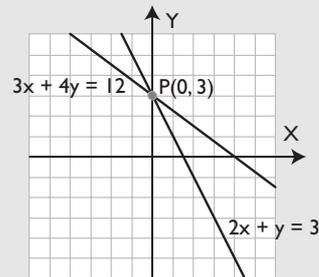
**Solución:**

Las rectas son secantes porque los coeficientes de las variables no son proporcionales.

$$\frac{3}{2} \neq \frac{4}{1}$$

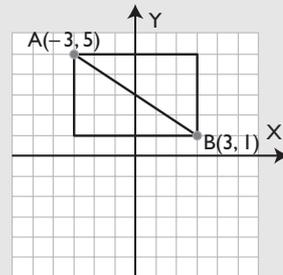
El sistema se resuelve por sustitución despejando  $y$  de la segunda ecuación.

La solución es  $x = 0, y = 3$



- 73** Dibuja un rectángulo sabiendo que tiene los lados paralelos a los ejes coordenados, y que las coordenadas de dos vértices opuestos son  $A(-3, 5)$  y  $B(3, 1)$ . Dibuja y halla la longitud de la diagonal.

**Solución:**



$$\begin{aligned} d(A, B) &= |\overline{AB}| = \sqrt{(3 + 3)^2 + (1 - 5)^2} = \\ &= \sqrt{36 + 16} = \sqrt{52} = 2\sqrt{13} = 7,21 \end{aligned}$$

- 74** Halla el valor de  $k$  para que las siguientes rectas sean paralelas:

$$\left. \begin{array}{l} 2x + 3y = 5 \\ kx - 6y = 1 \end{array} \right\}$$

**Solución:**

Para que sean paralelas, los coeficientes de las variables tienen que ser proporcionales.

$$\frac{2}{k} = \frac{3}{-6}$$

$$3k = -12$$

$$k = -4$$

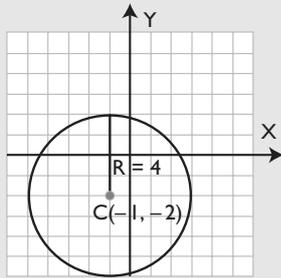
- 75** Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto  $A(-1, -2)$ , y de radio, 4 unidades. Haz el dibujo.

**Solución:**

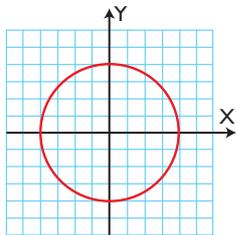
$$(x + 1)^2 + (y + 2)^2 = 4^2$$

# Ejercicios y problemas

$$x^2 + y^2 + 2x + 4y - 11 = 0$$



**76** Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



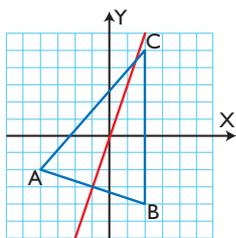
**Solución:**

Tiene el centro en  $O(0, 0)$  y radio  $R = 4$

$$x^2 + y^2 = 4^2$$

$$x^2 + y^2 = 16$$

**77** Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la mediatriz del lado AB

**Solución:**

La mediatriz del lado AB pasa por el punto medio M de AB y es perpendicular a dicho lado. Luego tendrá pendiente inversa y opuesta de la que tiene dicho lado.

$$A(-4, -2), B(2, -4) \Rightarrow M(-1, -3)$$

Pendiente del lado AB:

$$\overrightarrow{AB}(6, -2) \parallel (3, -1)$$

$$m_{AB} = -\frac{1}{3}$$

Pendiente de la mediatriz:

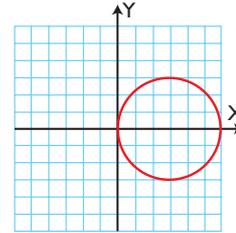
$$m_{\perp} = 3$$

Ecuación de la mediatriz:

$$y + 3 = 3(x + 1)$$

$$y = 3x$$

**78** Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



**Solución:**

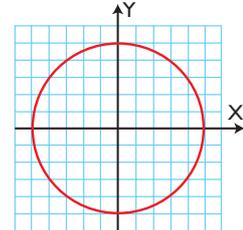
El centro es el punto  $C(3, 0)$  y el radio,  $R = 3$

$$(x - 3)^2 + y^2 = 3^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x = 0$$

**Para profundizar**

**79** Dada la circunferencia de centro el origen de coordenadas, y radio, 5

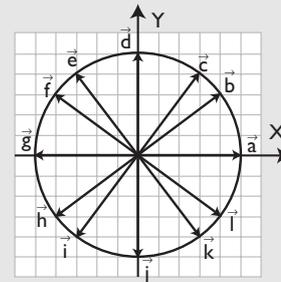


a) representa todos los vectores que nacen en el origen de coordenadas y tienen como extremo un punto de la circunferencia de coordenadas enteras.

b) Escribe la expresión analítica de cada uno de los vectores representados.

**Solución:**

a) Representación:



b) Expresión analítica:

$\vec{a}(5, 0)$	$\vec{b}(4, 3)$
$\vec{c}(3, 4)$	$\vec{d}(0, 5)$
$\vec{e}(-3, 4)$	$\vec{f}(-4, 3)$
$\vec{g}(-5, 0)$	$\vec{h}(-4, -3)$
$\vec{i}(-3, -4)$	$\vec{j}(0, -5)$
$\vec{k}(3, -4)$	$\vec{l}(4, -3)$

80 Dados los vectores:

$$\vec{u}(2, -3) \text{ y } \vec{v}(-1, 4)$$

calcula analíticamente:

a)  $3\vec{u} + 5\vec{v}$

b)  $5\vec{u} - 3\vec{v}$

**Solución:**

a)  $3(2, -3) + 5(-1, 4) = (1, 11)$

b)  $5(2, -3) - 3(-1, 4) = (13, -27)$

81 Dada la siguiente recta:

$$5x - 2y + 9 = 0$$

halla:

a) el tipo de ecuación.

b) un punto.

c) un vector normal.

d) un vector director.

e) la pendiente.

f) Representála.

**Solución:**

a) Ecuación general.

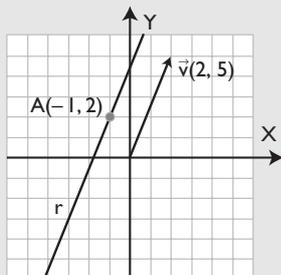
b)  $P(-1, 2)$

c)  $\vec{n}(5, -2)$

d)  $\vec{v}(2, 5)$

e)  $m = 5/2$

f) Representación:



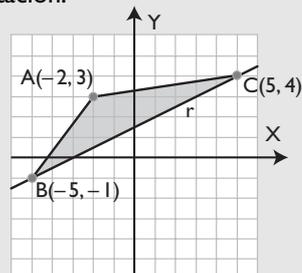
82 Dado el triángulo que tiene los vértices en los puntos  $A(-2, 3)$ ,  $B(-5, -1)$  y  $C(5, 4)$

a) representa dicho triángulo y dibuja la recta que contiene al lado BC

b) halla la ecuación de dicha recta.

**Solución:**

a) Representación:



b) Pendiente del lado BC:

$$\vec{BC}(10, 5) \parallel (2, 1)$$

$$m = \frac{1}{2}$$

$$y + 1 = \frac{1}{2}(x + 5)$$

$$y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$$

83 Halla el coeficiente  $k$  para que la recta:  $5x + ky = 1$  pase por el punto  $A(-3, 4)$

**Solución:**

$$5 \cdot (-3) + k \cdot 4 = 1$$

$$k = 4$$

84 Un romboide tiene tres vértices en los puntos  $A(-5, 1)$ ,  $B(-2, 5)$  y  $C(2, 5)$

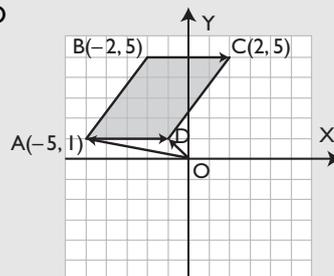
Halla:

a) el cuarto vértice.

b) la longitud de sus diagonales.

**Solución:**

a) Vértice D



# Ejercicios y problemas

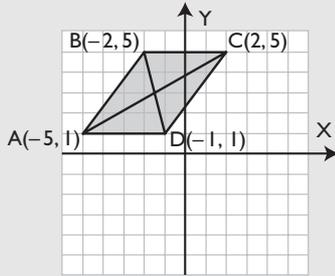
$$\vec{OD} = \vec{OA} + \vec{BC}$$

$$\vec{OA}(-5, 1)$$

$$\vec{BC}(4, 0)$$

$$\vec{OD} = (-5, 1) + (4, 0) = (-1, 1)$$

b) Longitud de las diagonales.



$$d(A, C) = |\vec{AC}| = \sqrt{7^2 + 4^2} = \sqrt{65} = 8,06 \text{ u}$$

$$d(B, D) = |\vec{BD}| = \sqrt{1^2 + (-4)^2} = \sqrt{17} = 4,12 \text{ u}$$

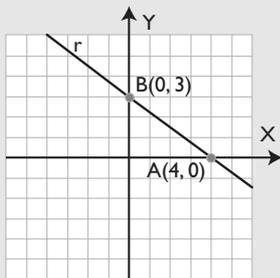
- 85** Halla la longitud del segmento determinado por los puntos de corte con los ejes coordenados de la recta siguiente:

$$3x + 4y = 12$$

**Solución:**

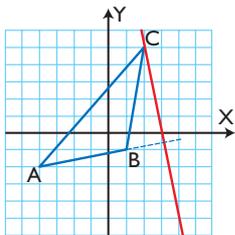
$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow 3x = 12 \Rightarrow x = 4 \Rightarrow A(4, 0)$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow 4y = 12 \Rightarrow y = 3 \Rightarrow B(0, 3)$$



$$d(A, B) = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5 \text{ unidades.}$$

- 86** Dado el triángulo de la siguiente figura:



halla la ecuación de la recta que contiene a la altura relativa al vértice C

**Solución:**

Se aplica la forma punto-pendiente.

Punto C(2, 5)

Pendiente: la altura es perpendicular a la base AB, luego su pendiente es inversa y opuesta de la pendiente del lado AB

$$\vec{AB}(5, 1) \Rightarrow m_{AB} = 1/5$$

$$m_{\perp} = -5$$

$$y - 5 = -5(x - 2)$$

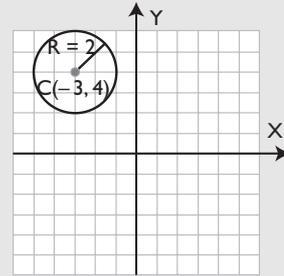
$$y = -5x + 15$$

- 87** Halla la ecuación de la circunferencia que tiene el centro en el punto C(-3, 4), y de radio, 2 unidades. Haz el dibujo.

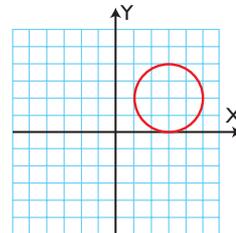
**Solución:**

$$(x + 3)^2 + (y - 4)^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 + 6x - 8y + 21 = 0$$



- 88** Halla la ecuación de la siguiente circunferencia:



**Solución:**

Tiene el centro en el punto C(3, 2) y radio, R = 2

$$(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$$

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y + 9 = 0$$

## Aplica tus competencias

- 89** Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 6x - 4y - 12 = 0$$

**Solución:**

$$C(3, 2), R = 5$$

- 90** Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2 + y^2 + 8x + 7 = 0$$

**Solución:**

$$C(-4, 0), R = 3$$

- 91** Halla mentalmente el centro y el radio de la siguiente circunferencia:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 6 = 0$$

**Solución:**

$$C(1, -3), R = 2$$

# Comprueba lo que sabes

- 1** Explica cómo se hallan las componentes de un vector definido por dos puntos. Pon un ejemplo.

**Solución:**

El **vector definido por dos puntos**  $A(x_1, y_1)$  y  $B(x_2, y_2)$  es el que se obtiene al restar al vector de posición del extremo el del origen.

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$$

Sus coordenadas son:

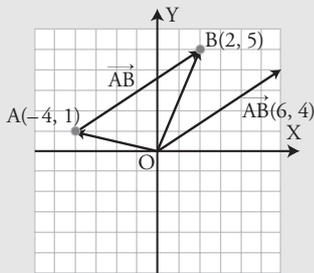
$$\vec{AB}(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

**Ejemplo**

Dados los puntos  $A(-4, 1)$  y  $B(2, 5)$ , calcula el vector  $\vec{AB}$

$$\vec{AB}(2 - (-4), 5 - 1)$$

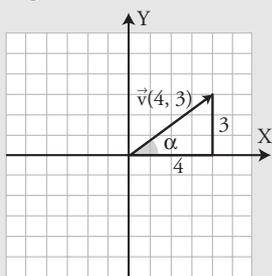
$$\vec{AB}(6, 4)$$



- 2** Calcula el módulo y el argumento del vector  $\vec{v}(4, 3)$

**Solución:**

Representación gráfica:



$$|\vec{v}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{3}{4}$$

$$\alpha = 36^\circ 52' 12''$$

- 3** Dada la recta  $4x - 3y = 12$ , ¿qué tipo de ecuación es? Halla dos puntos, un vector normal, un vector director y la pendiente. Haz la representación gráfica.

**Solución:**

Es la ecuación general.

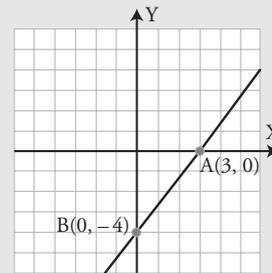
$$\text{Para } y = 0 \Rightarrow 4x = 12 \Rightarrow x = 3 \Rightarrow A(3, 0)$$

$$\text{Para } x = 0 \Rightarrow -3y = 12 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow B(0, -4)$$

$$\vec{n}(4, -3)$$

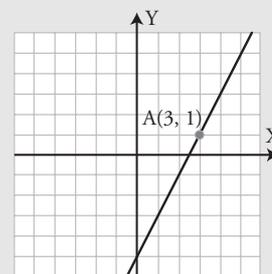
$$\vec{v}(3, 4)$$

$$m = 4/3$$



- 4** Dibuja la recta que pasa por el punto  $A(3, 1)$  y tiene de pendiente 2. Halla la ecuación de dicha recta.

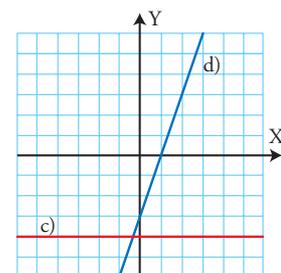
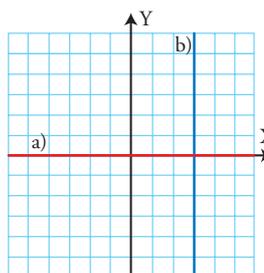
**Solución:**



Se aplica la ecuación punto-pendiente

$$y - 1 = 2(x - 3) \Rightarrow y = 2x - 5$$

- 5** Halla la ecuación general de las rectas representadas en los siguientes ejes de coordenadas:

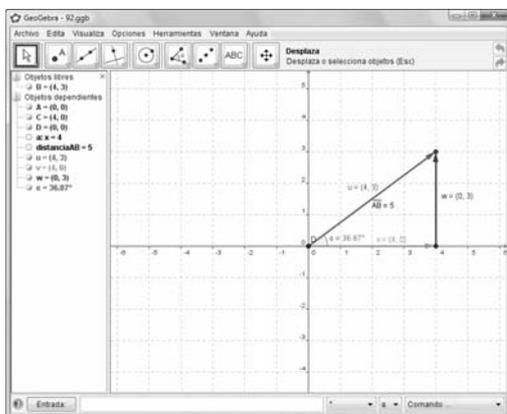






## Paso a paso

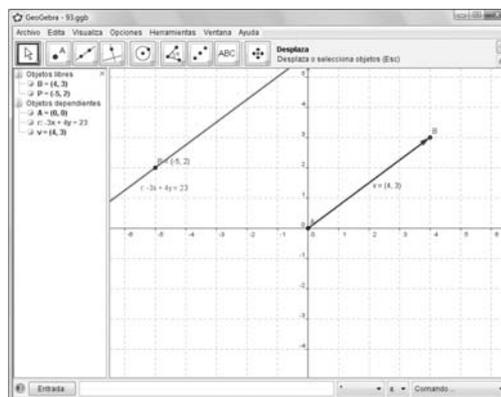
**92** Dibuja el vector  $\mathbf{u}(4, 3)$  y sus componentes. Halla el módulo y el argumento.



### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

**93** Dibuja la recta que pasa por el punto  $P(-5, 2)$  y tiene de vector director a  $\mathbf{v}(4, 3)$ . Halla la ecuación de la recta.



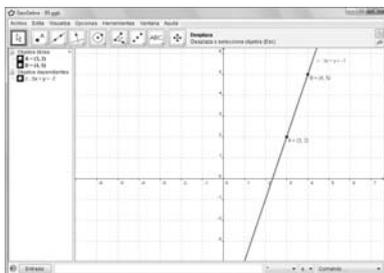
### Solución:

Resuelto en el libro del alumnado.

**94** Internet. Abre: [www.editorial-bruno.es](http://www.editorial-bruno.es) y elige Matemáticas, curso y tema.

## Practica

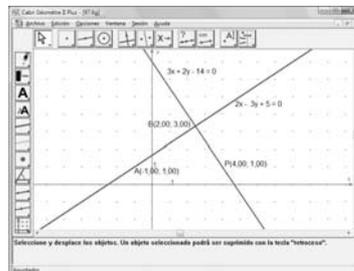
- 95** Dibuja la recta que pasa por los puntos  $A(3, 2)$  y  $B(4, 5)$  y halla su ecuación.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

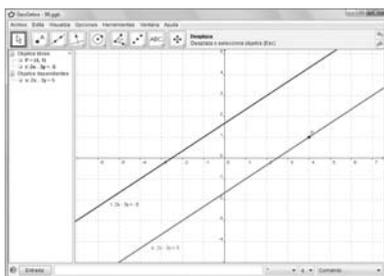
- 97** Dada la recta  $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ , halla una recta  $t$ , perpendicular a  $r$ , que pase por el punto  $P(4, 1)$



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

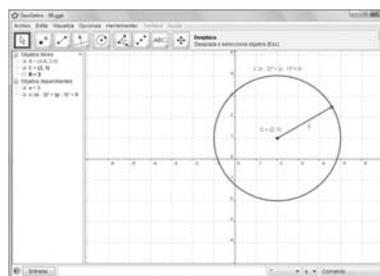
- 96** Dada la recta  $r \equiv 2x - 3y + 5 = 0$ , halla una recta  $s$ , paralela a  $r$ , que pase por el punto  $P(4, 1)$



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.

- 98** Dibuja la circunferencia de centro  $C(2, 1)$  y radio  $R = 3$ . Halla su ecuación.



**Solución:**

Resuelto en el libro del alumnado.